b) Prouver que $\forall x \in [0,1]$ on a : $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}$.

2°/ Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $[0,1]$ une seule solution notée a.

3°/ Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) Prouver que $\forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leq U_n \leq 1$.

b) Démontrer que $\forall n \in \mathbf{N},\ |U_{n+1} - a| \leq \frac{2}{3}|U_n - a|$.

c) Montrer que (U_n) est convergente vers a.

d) Trouver le plus petit entier n_0 tel que $\forall n \geq n_0,\ |U_n - a| \leq 10^{-3}$.

Exercice 8 :

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction f_n définie sur $\mathbf{R}$ par : $f_n(x) = 1 + \frac{x}{n+1} - e^{\frac{x}{n}}$.

1°/a) Etudier les variations de f_n.

b) Montrer que f_n admet un maximum strictement positif que l'on calculera.

2°/a) Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_n)$ représentant f_n admet une asymptote oblique Δ_n dont précisera une équation.

b) Tracer $(\mathcal{C}_2)$.

3°/ Démontrer que sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une racine unique que l'on notera x_n.

B) 1°/ Soit $x > 1$ et $\varphi(x) = \frac{2}{x} + \ln(\frac{x-1}{x+1})$.

Etudier le signe de $\varphi(x)$ pour tout réel $x > 1$.

2°/a) Montrer que $f_n(-2) < 0$ (on pourra introduire φ).

b) Montrer alors que $x_n > -2$.